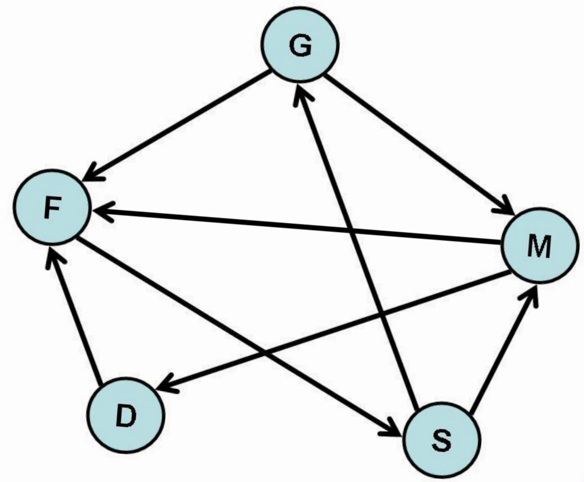
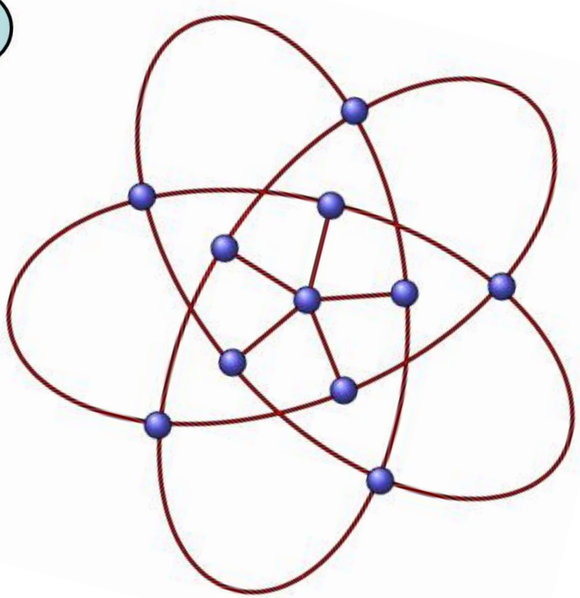
圖論





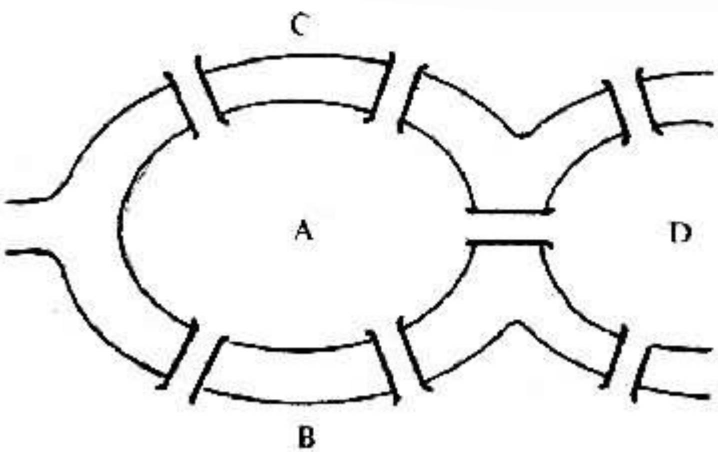


图 1　柯尼斯堡七桥问题

授課老師：陳鵬安

- 定義一：

一個圖G(graph)包含三部分：

(1)一個點集合(vertex set)，V(G)

(2)一個邊集合(edge set)，E(G)

(3)一個關係，其中描述每一個邊與二個(不一定相異)的點的關聯性。(這兩個(不一定相異)的點稱為該邊的端點(endpoints)

- 定義二：

一個超圖(hypergraph)由一個點集合V和一個邊集合E所構成，其中邊集合E由V的子集合所構成，即$E \subseteq 2^V$

- 定義三：

(1)一個弧圈(loop)為一個兩端點相同的邊。

(2)若有數個(≧2)邊具有相同的端點，則這些邊稱為重邊(multipe edges)

- 定義四：

(1)一個包含重邊的圖稱為重邊圖(multigraph)

(2)具有弧圈的圖稱為近圖(pseudograph)

- 定義五：

若一個圖G的點集合為有限集合，則稱G為有限圖(finite graph)，否則稱G為無窮圖(infinite graph)

- 定義六：

一個沒有弧圈也沒有重邊的圖稱為簡單圖(simple graph)

- 定義七：

在圖G中，若{u, v}為一個邊，則稱u和v兩端點為相鄰(或相連)(adjacent)，彼此為鄰居(neighbors)，並稱u(或v)與此邊相接(incident)。

- 定義八：

一個點集合與邊集合皆為空集合的圖稱為零圖(null graph)

- 定義九：

一個圖中若任意相異點皆有邊相連，嘖稱此圖為完全圖(complete graph)

- 定義十：

G=(V,E)為一個圖，$S \subseteq V$

(1)若S中的點，任意兩點皆相連，則稱S為粘集(clique)

(2)若S中的點，任意兩點皆不相連，則稱S為獨立集(independent set)或穩定集(stable set)

(3)若S*為G中最大的獨立集，

則(S*)稱為獨立數(independent number)記為 $\beta(G)$

- 定義十一：

若圖G=(V,E)中，V= $A \cup B$

其中A,B皆為獨立集，且 $A \cap B = \varnothing$

則稱G為二分圖或二部圖(bipartite graph)，而A,B為圖G的部集(partite set)。

若任意 $u \in A, v \in B$，u和v皆相連，則此二分圖G稱為完全二分圖(complete bipartite graph)。

- 定義十二：

  $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2)$ 為兩個圖

  (1) G_1 與 G_2 的聯集(union)為G=(V, E)，

  其中 $V=V_1\cup V_2,E=E_1\cup E_2$

  (2) G_1 與 G_2 的交集(intersection)為

  G=(V, E)，其中 $V=V_1\cap V_2,E=E_1\cap E_2$

- 定義十三：

  圖G上圖H的卡迪遜積(Cartesian product)為 $G\times H=(V,E)$

  其中 $V=V(G)\times V(H)$

  且 $E=\{\{(u,x),(v,y)\}:\{u,v\}\in E(G)$

  且 $x=y$ or $u=v$ and $(x,y)\in E(H)\}$

- 定義十四：

若下列的條件滿足，

則稱圖 $G_1, G_2, G_3 \cdots G_t$為圖G的一個分割（decomposition）

（i）對所有 $i \in \{1, 2 \cdots t\}\ V(G_i) \subseteq V(G)$

（ii） $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \cdots \cup E(G_t) = E(G)$

（iii）任意 $i \neq j, 1 \leq i, j \leq t, E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$

- 定義十五：

圖G與H為兩不相交的圖，用GVH代表G與H相連(join)相連後所得的圖。

則GVH=(V, E)，其中 $V = V(G) \cup V(H)$

且 $E = E(G) \cup E(H) \cup \{(u,v): u \in V(G), v \in V(H)\}$

- 定義十六：

圖G與H的合成(composition)記為G[H]=(V, E)其中 $V = V(G) \times V(H)$

$E = \{\{(u,x),(v,y)\}: \{u,v\} \in E(G)\ or\ u = v$
且 $\{x, y\} \in E(H)\}$

- 定義十七：

圖G的補圖(complement)記為$\overline{G}$

其中 $V(\overline{G})=V(G)$

且$E(\overline{G})=\{\{u,v\}:u,v\in V(G)$且$\{u,v\}\notin E(G)\}$

- 定義十八：

圖G的邊圖(line graph)

記為 $L(G)=(V_L,E_L)$

其中 $V_L=E(G)$;

$E_L=\{\{e,f\}:e,f\in E(G)$ 且e, f有共同的端點}

- 定義十九：

  邊e={u, v}為圖G中的一邊，則圖G在e邊上的收縮(edge contraction)是指將e去掉後把u, v合成一個點(與e點相接的邊即為圖G中與u與v相接且不是e的那些邊)所得的圖，記為G↓e

- 定義二十：

  由圖G經過一些邊收縮所獲得的圖，稱為G的一個收縮圖(contraction graph)

- 定義二十一：

若v為圖G上的一點，則G在v點分裂為二(vertex split)所得的新圖 G' 為將G多增加一點 V'，而與 V' 相連的點即為圖G中與v相連的點。

- 定義二十二：

由完全圖經過一些點分裂所得的圖稱為完全分裂圖(complete split graph)

- 定義二十三：

  若圖H滿足 $V(H)\subseteq V(G)$且$E(H)\subseteq E(G)$

  則稱H為G的一個子圖（subgraph），而G稱為H的擴充圖（supergraph）

  記為 $H\subseteq G$，我們也說成「G包含(contains)H」。

- 定義二十四：

  G=(V,E)為一個圖，$e\in E$

  則圖G-e定義為G-e=(V,E\{e})

  若 $T\subseteq E$，則圖G-T定義為G-T=(V,E\T)

- 定義二十五：

圖G=(V, E)， $v \in V$，

則圖G−v定義為G−v=(V\{v}, E')

其中 $E' = \{e : e \in E$且v不是e的端點$\}$

若 $S \subseteq V$，則圖G−S定義為G−S=(V\{S},E')

其中 $E' = \{e : e \in E$且e沒有與S中的點相接$\}$

- 定義二十六：

  若H=G-S，$S\subseteq V(G)$，則H稱為G的一個導出子圖(induced subgraph)。

  若T=V(G)-S，則H亦稱為由T所導出的子圖，記為G[T]。

- 定義二十七：

  G=(V, E)中一點v的鄰域(neighborhood)為所有v的鄰居所成的集合，記為$N_G(v)$

  亦即$N_G(v)=\{u\in V(G):\{u,v\}\in E(G)\}$

- 定義二十八：

G=(V,E)為一圖，$E' \subseteq E$。

G的邊導出子圖(edge-induced subgraph)H定義為 $H=(V',E')$

其中 $V'=\{v \in V : v\text{是某邊}e \in E'\text{的端點}\}$

- 定義二十九：

$v \in V(G)$ 點v的度(或度數)(degree)為所有與v相連的點的個數，記為 $\deg_g(v)$

圖G的最大度數(maximum degree)

$\Delta(G)=\max\{\deg_g(v) : v \in V(G)\}$

- 定義三十：

G=(V,E)，|V|稱為G的秩(order)。

|E|稱為G的大小(size)。

而 $\sum_{v\in V(G)} \deg_G(v)$ 則稱為G的體積(volume)

- 定義三十一：

若圖G中的每一個點都有相同的度，則G稱為正則圖(regular graph)。

若每一個點的度數皆為r，則G也稱為r-正則圖(r-regular)，且r稱為圖G的度(valency)。

- 定義三十二：

  $v \in V(G)$,若$\deg_G(v)=0$

  則v稱為孤立點(isolated vertex)

- 定義三十三：

  |V(G)|=n，

  若將G的點排列為$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$使得

  對任意$i\in\{1,\cdots,n-1\}, d_i=\deg_G(v_i)\geq d_{i+1}=\deg_G(v_{i+1})$

  都成立，則數列$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$稱為G的度數列(degree sequence)。

  若|V(G)|=∞，則度數列為一無窮數列。

- 定義三十四：

設G為一個沒有弧圈的圖，

且 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}, E(G)=\{e_1,\cdots,e_m\}$

(1)G的相鄰矩陣(adjacency matrix)，

記為A(G)，為一個n階方陣。

A(G)= $(a_{ij})_{n\times m}$ 其中 a_{ij} 即為G中

以 $\{v_i,v_j\}$為端點的邊數。

(2)G的相接矩陣(incidence matrix)，

記為M(G)，為一個 $n\times m$ 矩陣，$M(G)=(m_{ij})_{n\times m}$

其中 $m_{ij}=\begin{cases}1,\text{若}\mathrm{v}_\mathrm{i}\text{是}e_j\text{的一個端點}\\0,\text{若}\mathrm{v}_\mathrm{i}\text{不是}e_j\text{的端點}\end{cases}$

- 定義三十五：

設G和H為二個簡單圖，
若存在一個一對一且映成(bijection)的函數f:V(G)→V(H)
使得 $\{u,v\}\in E(G)\Leftrightarrow\{f(u),f(v)\}\in E(H)$
則稱G和H為同構(isomorphic)，
記為 $G\cong H$。此一對一映成函數f稱為同構對應(isomorphism)。

- 定義三十六：

S是一個集合，則S上的一個關係 R(relation)即為$S \times S$的一個子集合，$R \subseteq S \times S$。S上的一個等價關係 R(equivalence relation)是一個S上的關係並且滿足:對任意S中的元素x, y, z, 下列三性質皆成立。

(i) $(x,x) \in R$ (反身性)(reflexive property)

(ii)若$(x,y) \in R$則 $(y,x) \in R$

(對稱性)(symmetric property)

(iii)若$(x,y) \in R$且$(y,z) \in R$則$(x,z) \in R$

(遞移性)(transitive property)

- 定義三十七：

  若集合S上有一個等價關係(equivalence relation)R，而 $x \in S$

  則x的等價集為 $\{y \in x : (x, y) \in R\}$

- 定義三十八：

  圖形的同構類(isomorphism class)即為所有圖形的集合在同構的等價關係下的一個等價類。

- 定義三十九：

一個從G到G的同構對應，稱為G的一個自同構對應(automorphism)，若對任意二點 $u,v \in V(G)$ 都存在一個G的自同構對應使f(u)=v，則稱G為點可遞移的(vertex-transitive)。

- 定義四十：

若一個圖G與它的補圖 $\overline{G}$ 同構，

即 $G \cong \overline{G}$ ，則G稱為自補同構圖(self-complementary)