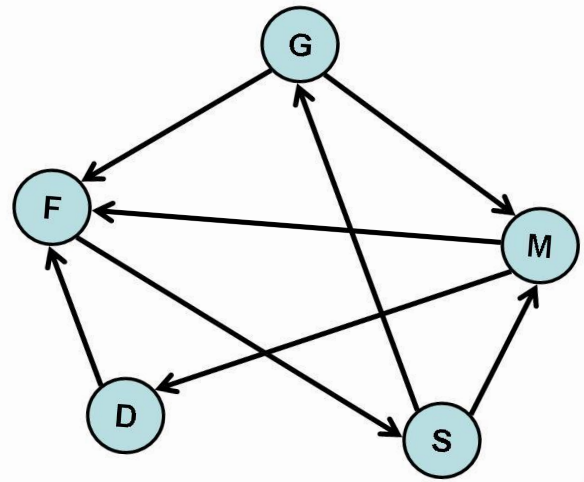
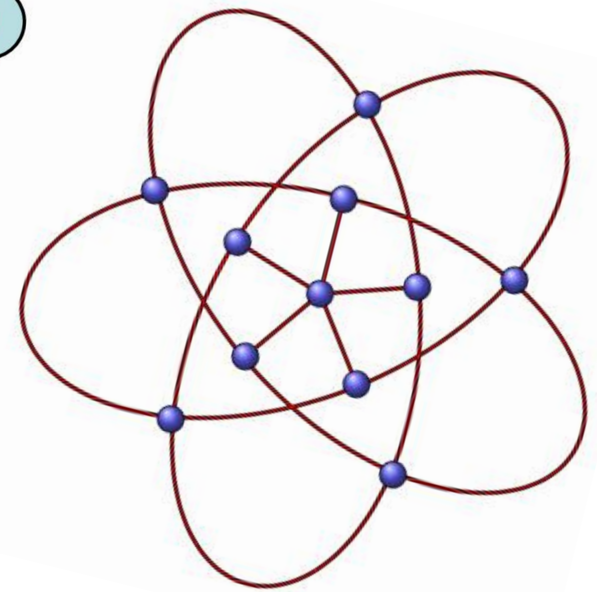
圖論





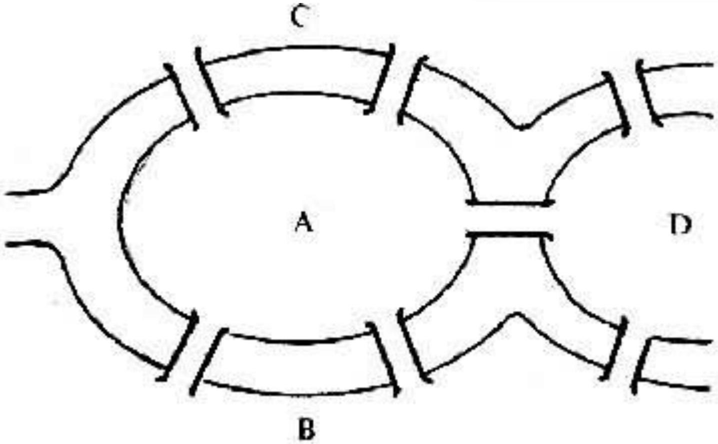


图 1　柯尼斯堡七桥问题

授課老師：陳鵬安

- 定義四十一：

(1)若 P_n 是一個簡單圖且

$$V(P_n)=\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}\ E(P_n)=\{\{v_i,v_{i+1}\}:i=0,1,\cdots,n-2\}$$

則 P_n 稱為一條路徑(path)或n−路徑(n−path)

(2)若 C_n 是一個簡單圖且

$$V(C_n)=\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}$$

$$E(C_n)\{\{v_0,v_{n-1}\},\{v_i,v_{i+1}\}:i=0,1,\cdots,n-2\}$$

則 C_n 稱為一個圈(cycle)或n−圈(n−cycle)

- **定義四十二：**

(1)若$v_i \in V(G), i = 0,1,\cdots,k.$

$e_j \in E(G), j = 1,2,\cdots k.$且對任意$j, e_j = \{v_{j-1}, v_j\},$

則此排列$(v_0, e_1, v_1, \cdots, e_k, v_k)$稱為一個步行$(walk)$

(2)在一個步行$v_0, e_1, v_1, \cdots, e_k, v_k$中

若任意邊e_j皆沒有重覆出現,

則此步行稱為一個步徑$(trail)$.

(3)一個$u,v-$步行$(u,v-walk)$[或$u,v-$步徑]

即為一個起點$v_0 = u$且終點$v_k = v$的步行(或步徑)

u,v稱為它的端點$(endpoints)$

(4)一條路徑中,若u, v為度數為1的點
則此路徑稱為u, v-路徑(u, v-path)
而u, v稱為此路徑的端點($endpoints$)
其它點稱為內部點($internal\ vertices$)

- 定義四十三：

一條步行，步道，路徑，
或圈的長度(length)即為它的邊數。
一條步行或步徑，若兩端點相同，
則稱它為封閉的(closed)。
一條封閉的步徑又稱為一條迴路(circuit)。

- 定義四十四：

若圖G包含圈，則定義此圖的圍長(girth)為圖中最短的圈的長度。
若圖G不包含圈，
則圖G的圍長為無窮大(infinite girth)。

- 定義四十五：

(1)若對任意$u,v \in V(G)$
皆存在一條$u,v-$路徑在G中，
則G稱為連通(connected)圖，
否則，即為不連通圖(disconnected graph)

(2)若G包含*u*, *v*-路徑，

則稱*u*可連通到(connected to)*v*.

(3)V(G)上的連通關係(connection relation)

R={(u,v)|u可連通到v}

- 定義四十六：

設C為圖G的一個連通子圖，若C以外的所有G中的點都不可連通到C中的點，則稱C為圖G的一個部分(component)。

一個部分(或一個圖)中若沒有任何邊存在，則稱它為空的(trivial)，否則，稱為非空的(nontrivial)。

- 定義四十七：

$e \in E(G), v \in V(G)$

若G-e[或G-v]的部分的個數比G的部分的個數還多，則稱此e[或v]為一個切邊(cut-edge)[或切點(cut-vertex)]

- 定義四十八：

一個圖中若存在一個迴路通過所有的邊，則此圖稱為尤拉圖(Eulerian graph)

該迴路稱為尤拉迴路(Eulerian circuit)或尤拉步徑(Eulerian trail)

- 定義四十九：

(1)一個度數為奇數[偶數]的點，

稱為奇點(odd vertex)[偶點(even vertex)]

(2)所有點皆為奇點[偶點]的圖，

稱為奇圖(odd graph)[偶圖(even graph)]

- 定義五十：

$(d_1, d_2, d_3 \cdots)$為一個非負整數數列

且$d_i \geq d_{i+1}, i \geq 1$

若存在一圖G，其度數列恰為此數列，

則稱此數列為可畫圖的數列(graphical sequence)

- **定義五十一：**

彼得森圖(Petersen graph) P(V, E)為一個簡單圖，

共點集合V={x:x為1,2,3,4,5}的二元子集}

而邊集E={{x,y}:x∩y=∅}

- **定義五十二：**

K維方塊圖(K-dimensional cube)的超立方圖(hypercube) $Q_k=(V,\mathrm{E})$

其中V=$\{(a_1,a_2,\cdots,a_k):a_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,k\}$

而E=$\{\{\mathrm{A},B\}:\mathrm{A}=(a_1,\cdots,a_k),B=(b_1,\cdots b_k)\in V$

使得恰有一個$i\in\{1,2,\cdots,k\}$滿足$a_i\neq b_i\}$

它的j維子方塊圖即為一個與Q_j同構的子圖

- 定義五十三：

H為一圖，若圖G中沒有與H同構的導出子圖，則稱圖G為一個無導出H圖(H-free)

- 定義五十四：

一個有向圖(directed graph or digraph) G包含一個點集合V(G).

一個邊集合E(G)以及一個函數，它將每一個邊對應到一個由點所構成的有序對。

我們將這樣的有向邊稱為弧(arc)，而有向序對(u,v)中的第一個點u稱為此弧的尾(tail)

第二個點v則稱為頭(head)，且u和v皆為此弧(u, v)的端點(endpoints)。

同時，我們也稱v為u的後繼點(successor)而u為v的前任點(predecessor)，此有向邊稱為由u到v的有向邊。

- 定義五十五：

在一個有向圖中，弧圈(loop)代表兩端點相同的有向邊，具有相同的頭和尾的數個有向邊，稱為重邊(multiple edges)

若每個有向序對皆為至多一個邊的頭和尾，則此有向圖為簡單(simple)有向圖。

- 定義五十六：

(1)

一個有向路徑(*path*)是一個簡單有向圖，

共點集合可被排成$\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$

使得邊集合為$(v_i, v_{i+1}), i$=0,1,$\cdots$,n-2這些弧所構成。

此路徑稱為由v_0到v_{n-1}的有向路徑。

(2)

一個有向圈(directed cycle)是一個簡單有向圖，

共點集合可被排成$\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$

使得邊集合為$(v_i, v_{i+1}), i$=0,1,$\cdots$,n-2

及(v_{i+1}, v_0)這些弧所構成。

- 定義五十七：

將有向圖D的有向邊(u, v)皆改為無向邊{u, v}所得的圖稱為圖D的潛在圖(underlying graph)。

- 定義五十八：

(1)有向圖中的子圖(subgraph)，
同構(isomorphism)，分割(decomposition)，
與圖形的聯集(union)和交集(intersection)
的定義均與一般圖相同。

(2)有向圖D的相鄰矩陣(adiacency matrix)
A(D)=(a_{ij})中的a_{ij}是以v_i為尾，v_j為頭的弧的數量

(3)簡單有向圖D的相接矩陣(*incidence matrix*)

$$\mathrm{M(D)}=(m_{ij})\text{中的}m_{ij}=\begin{cases}1,\text{若}v_i\text{為有向邊}e_j\text{的尾}\\-1,\text{若}v_i\text{為有向邊}e_j\text{的頭}\end{cases}$$

- 定義五十九：

D為一個有向圖

(1)若D的__圖為連通圖，則稱D為弱連通圖(weekly connected).

(2)若任意由D中的點所構成的有序對(u, v)，皆存在一條由u到v的有向路徑在D中，則稱D為強連通圖(strongly connected)或強(strong)圖

(3)圖D的強部分(strong component)為一個D的強連通子圖C，且任意C外的點v，皆不存在從v到C中的點的有向路徑。

- 定義六十：

一個有向圖D中的核($Kernel$)

是一個集合$\mathrm{S} \subseteq \mathrm{V(D)}$滿足

(1)任意$u, v \in \mathrm{S}, (u, v) \notin E(D)$

與(2)任意$u \in \mathrm{V(D)\backslash S}$.

u有一個後繼點($successor$)在S中。

若圖D的任意子圖皆具有一個核，

則稱D為核完全圖(kernel perfect)

- 定義六十一：

D為一個有向圖且$v \in \mathrm{V(D)}$

(1)點v的外度(outdegree)$\alpha^{+}(v)$為以v為尾的有向邊數

(2)點v的內度(indegree)$\alpha^{-}(v)$為以v為頭的有向邊數

(3)點v的外度鄰域(out-neighborhood)

或後繼點集(successor set)

$$\mathrm{N}^{+}(v)=\{x \in V(D):(v,x) \in E(D)\}$$

(4)點v的內度鄰域(in-neighborhood)

或前任點集(predecessor set)

$$\mathrm{N}^{-}(v)=\{x \in V(D):(x,v) \in E(D)\}$$

- 定義六十二：

有向圖D的分圖(*split*)

為一個以V^+和V^-為二部集的二部圖

G:每一個點$x \in V(D)$，

都對應有一點$x^+ \in V^+$和一點$x^- \in V^-$

且每一個有向邊$(u,v) \in E(D)$

都對應一保邊$\{u^+, v^-\}$在G中。

- 定義六十三：

在一般圖G上加上一個

定義於$V(G) \cup E(G)$的加權函數

即為一個加權圖(weighted graph)

- 定義六十四：

有向圖D中，

$v_i \in V(D), i=0,1\cdots,k$, $e_j \in E(D),\ j=1,2\cdots,k$

若有向邊$e_j=(v_{j-1},v_j),\ j=1,2\cdots,k$

則$v_0,e_1,v_1,e_2,v_2\cdots e_k,v_k$

為一個有向步行(*directed walk*)

若任意邊e_j皆沒有重覆邊出現，

則此有向步行亦稱為有向步徑(*directed trail*)

封閉的有向步徑稱為有向迴路(*directed circuit*)

- 定義六十五：

在一有向圖中的尤拉步徑(Euler trail)是一條包含所有邊的有向步徑。封閉的尤拉步徑即為尤拉迴路(Euler circuit。具有尤拉迴路的有向圖稱為尤拉有向圖。

- 定義六十六：

將圖G中的每一邊給定一個方向所得的有向圖稱為圖G的一個定向(erientation)。定向圖(oriented graph)為簡單圖的一個定向。完全圖的一個定向又稱為競賽圖(tournament)

- 定義六十七：

D為一有向圖，$v^* \in V(D)$ 若任給一個點$v \in V(D)$均存在一條長度不超過2的有向路徑從v到v^*則點v^*稱為圖D的王點$(king)$

- 定義六十八：

一個$(2,n)$-迪布恩數列($(2,n)$-*deBruijn sequence*)

(1)$a_i \in \{0,1\}, i=1,2,\cdots,2^n$;且

(2)$(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{j+n-1})\ j=1,2,\cdots,2^n (\mathrm{mod}\ \ 2^n)$

為相異的2^n個n維向量

- 定義六十九：

$(2,n)-$迪布恩(de Bruijn)有向圖

$D_{2,n}$為一個加權有向圖滿足:

(1)$V(D_{2,n})=(Z_2)^{n-1}$及

(2)從$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$到$(a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n)$

為一有向邊並給予它加權$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

- 定義七十：

圖G的一條郵差路線(postman tour)是指一條通過G中所有邊至少一次的封閉步行。

- 定義七十一：

  在加權圖中，一條郵差路線所經過的邊的加權總和若為最小，則此路線為最佳郵差路線(optimal postman tour)

- 定義七十二：

(1)一個不含任何圈的圖，稱為無圈的(acyclic)圖。

(2)所謂的森林(forest)即為無圈的圖。

(3)樹圖(tree)是指連通的無圈圖。

- 定義七十三：

  (1)若H為G的子圖且V(H)=V(G)，則H稱為圖G的懸掛子圖(spanning subgraph)

  (2)若H為G的懸掛子圖，且H是一個樹圖，則稱H為G的懸掛樹(spanning tree)

- 定義七十四：

  u, v為圖G中的二點，我們將從u到v的距離記為 $d_G(u,v)=\infty$ ，或d(u, v)，

  並定義為所有u, v路徑中的最短路徑得長度。若u和v無路徑相連，則將u到v的距離定為 $\infty(d(u,v)=\infty)$

- 定義七十五：

圖G上一點v的離心率(*eccentricity*)記為$\varepsilon(v)$

定義為$\varepsilon(v)=\max\{d_G(u,v):u\in V(G)\}$

- 定義七十六：

圖G的直徑(*disameter*)記為D(G)

定義為$\mathrm{D(G)}=\max\{\varepsilon_G(v):v\in V(G)\}$

圖G的半徑(*radius*)記為$r(G)$

定義為$r(G)=\min\{\varepsilon_G(v):v\in V(G)\}$

- 定義七十七：

  由圖G中具有最小離心率的點所導出的子圖，稱為圖G的中心(center)。

- 定義七十八：

  若一個樹圖中具有一條路徑包含或相接於所有的邊，則此樹圖稱為毛毛蟲圖(caterpillar)。該路徑稱為此毛毛蟲圖的脊椎(spine)。

- 定義七十九：

若|E(G)|=m　，

且$c_1, c_2, c_3 \cdots c_q$為圖G中所有的圈

則G的圈矩陣(*cycle matrix*)

$C(G) = (a_{ij})$為一個$q \times m$矩陣

$$\text{其中 } a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{若} e_j \text{是} c_i \text{的一邊} \\ 0, \text{若} e_j \text{不是} c_i \text{的一邊} \end{cases}$$

- 定義八十：

  若將圖G的圈矩陣的列視為佈於GF(2)的向量，則由圈矩陣的列所生成的向量空間稱為G的圈空間(cycle space)。

  而圈矩陣的階數(rank)稱為圈階數(cycle rank)，一般也稱為G的貝蒂數(Betti number)。

- 定義八十一：

(1)在樹圖中若選定某個點r為樹根(root)，則此樹圖稱為有根樹圖(rooted tree)。若令p(v)表示此樹圖中那條唯一的v, r-路徑，則v的父母(parent)為v在p(v)上的鄰居。而v的其它鄰居稱為它的小孩(children)。V的祖先(ancestor)是路徑p(v)上除了v之外的所有點。

而如果p(u)包含v點，點u就是v的一個子孫(descendent)。

沒有小孩的點稱為樹葉(leave)。

(2)一個有根的平面樹圖(rooted plane tree)或植樹(planted tree)是一個有根樹圖，其中每一個點的小孩都由左至右排定順序。

- 定義八十二：

(1)一個二元樹圖(binary tree)是一個有根的平面樹圖，其中每個點最多只能有二個小孩，而且每個小孩都被指定為該點的左小孩(left child)或右小孩(right child)

(2)在一個二元樹圖中，以樹根的小孩為樹根的二元子樹圖稱為左子樹圖(left subtree)

(3)一個有根平面樹圖若允許每個點最多有k個小孩，則稱為k元樹圖(k-ary tree)

- 定義八十三：

(1)一個外向樹圖(out-tree)是一個樹圖的定向，其中樹根的內度為0，其它點的內度皆為1。

(2)將外向樹圖中的每個邊的方向皆反轉，即為一個內向樹圖(in-tree)。

- 定義八十四：

(1)圖G的一個配對(matching)是由圖G的一些邊所成的集合，其中每個邊都不是弧圈，而且任兩邊都沒有共同的端點。

(2)與配對M中的邊相接的點稱為是M-飽和的(M-saturated)，其它G中的點稱為M-未飽和的(M-unsaturated)。

(3)一個完美配對(perfect matching)是一個使每個點都飽和的配對。

- 定義八十五：

一個配對中的邊數稱為此配對的大小(size)

- 定義八十六：

(1)一圖的最大配對(maximal matching)是一個不能再增加邊數(無法再加入任何邊)的配對。

(2)一圖的極大配對(maximum matching)是所有配對中邊數最多的配對。

- 定義八十七：

給定一個圖G中的配對M：

(1)若有一條路徑，其中在M中的邊與不在M中的邊交替出現，則此路徑稱為M-交替路線(M-alternating path)。

(2)若一條M-交替路線的兩個端點皆為M-未飽和的點，則此路徑又稱M-擴大路徑(M-augmenting path)。

- 定義八十八：

若G和H為具有相同點集合V的兩圖，

則G和H的對稱差圖$G\Delta H$(symmetric difference)

的集合亦為V，而邊集合則由恰屬於G和H

其中一圖的邊所成的集合。

兩個由一些邊所成的集合的對稱差

亦為恰屬於其中一個集合的邊所形成的集合。

當M和M′皆為配對時，

$M\Delta M'=(M-M')\cup(M'-M)$

- 定義八十九：

圖G的點覆蓋(*vertex* cover)
是一個集合$Q \subseteq V(G)$，
其中包含G中所有邊的至少一個端點，
我們也說Q中的點覆蓋(cover)E(G)。

- 定義九十：

圖G中的邊覆蓋(*edge* cov*er*)
是一個由一些G中的邊所夠成的集合L
使得G中的每一個點都與L中的某邊相連。

- 定義九十一：

圖G中的控制集(dominating set)

是一個集合$S \subseteq V(G)$使得每一個不在

S中的點都有一個鄰居在S中。

而控制數(dominating number)$\gamma(G)$

則是G中最小的控制集的大小。

- 定義九十二：

圖G中的點v的封密鄰域(closed neighborhood)

$N[v]$定義為$N[v]=N(v)\cup\{v\}$,

此即被v控制(dominated)的點。

- 定義九十三：

S為G中的一個控制集

(1)若S的導出的子圖G[S]是連通的，則稱S為連通控制集(connected dominating set)。

(2)若G[S]為一個獨立集，則稱S為獨立控制集(independent dominating set)。

(3)若G[S]中沒有孤立點，則稱S為完全控制集(total dominating set)。

- 定義九十四：

  圖G的懸掛子圖又稱為G的一個因子(factor)。G的k-因子(k-factor)是指G的一個懸掛k-正則子圖。

- 定義九十五：

  一圖的奇部分(odd component)是只具有奇數個點的部分。

- 定義九十六：

給定一個函數 $f:V(G)\to\mathbb{N}\cup\{0\}$,
圖G的f −因子是一個G的懸掛子圖，
使每個G中的點v皆具有$\deg_H(v)=f(v)$

- 定義九十七：

輪圖(wheel)是一個由圈C_n與一個點v
相連所得的圖，即輪圖W=$C_n\vee\{v\}$

- 定義九十八：

(1)圖G的分隔集(*separating set*)或*vertex cut*(點切集)是一個集合S$\subseteq$V(G)，使得G-S具有不只一個部分。

(2)圖G的點連通數(*connecteivity*)記為κ(G)，

定義為$\kappa(G)=\min\{|S| \mid S \leq V(G)$

且G-S為不連通圖或只有一點}

(3)若圖G的點連通數至少為k，

則稱G為k-連通圖(k-connected)

(4)圖G中兩點u,v的分隔集是一個集合S$\leq$V(G)，

使得u和v落在G-S中兩個相異的部分裡。

- 定義九十九：

(1)圖G的切斷邊集($disconnected\ \ set$)

是一個集合$F \subseteq E(G)$

使得G-F具有不只一個部分。

(2)圖G得邊連通數($edge - connectivity$)記為$\kappa'(G)$

定義為最小的切斷邊集的大小。

(3)若圖G的邊連通數至少為k，

則稱G為k-邊連通圖(k-edge-connected)

- 定義一百：

$S,T \subseteq V(G)$。

我們用符號[S,T]表示所有一個端點在S，另一端點在T的邊所成的集合。

若將V(G)\S記為$\bar{S}$，則邊切集(edge cut)即為具$[S,\bar{S}]$這種型式的邊集合，其中$S \neq \emptyset$且$S \neq V(G)$。

若$[S,\bar{S}]=k$，則此邊切集又稱k-邊切集。