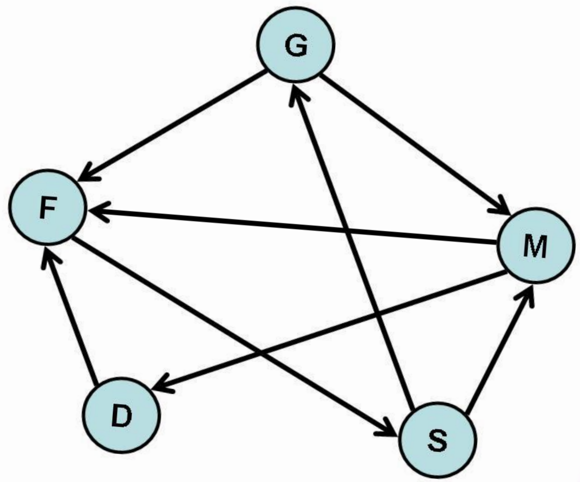
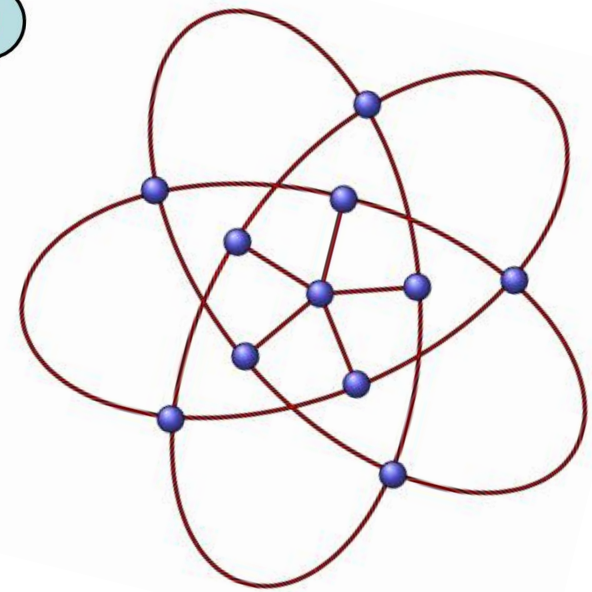
圖論





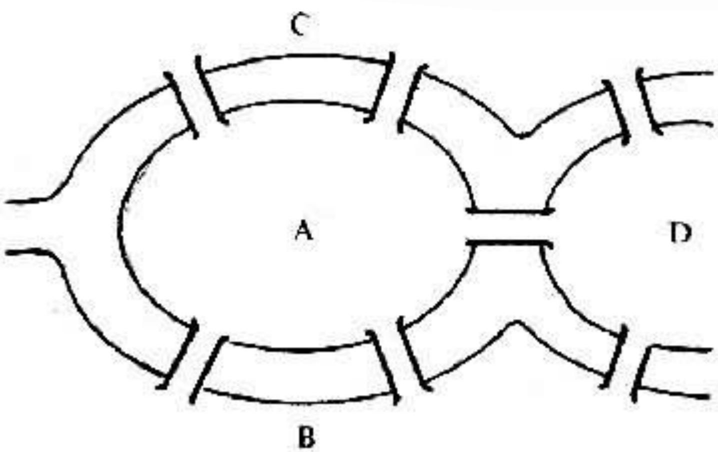


图 1　柯尼斯堡七桥问题

授課老師：陳鵬安

- 定義101：

  若某邊切集中，扣除任何一邊便不再是一個邊切集，則此邊切集亦稱為G的一個聯結(bond)。
- 定義102：

  H為G中不具有切點的連通子圖，若加入一邊便無法保持此性質，則H稱為圖G的區塊(block)。
- 定義103：

  若兩條u, v-路徑沒有共同的內部點，則稱他們為內部點互斥的(internal disjoint)

- 定義104：

$\{u,v\}\in E(G)$，$\{u,v\}$的細分$(subdivision)$
是指在$\{u,v\}$邊上加入一個新點w
用路徑u,w,v取代邊$\{u,v\}$的一種運算。

- 定義105：

(1)P為G中的一條路徑且具有任何內部點在G中的度皆為2的性質，若此路徑常度無法再增加，即加入任一邊便無法保持上述性質，則此路徑亦稱為圖G的一個耳朵(ear)

(2)若$P_0, P_1, \cdots\cdots, P_K$是圖G的一個分割，

其中P_0為一個圈且任意$P_i (1 \le i \le k)$皆為子圖

$P_0 \cup P_1 \cup \cdots\cdots \cup P_i$的一個耳朵，

則稱此分割為圖G的一個耳朵分割。

- 定義106：

(1)若C為圖G中長度為n的圈，

且其中有n-1個點在G中的長度皆為2，

則C又稱G的一個封閉耳朵(closed ear)

(2)若$P_0, P_1, \cdots, P_k$為圖G的一個分割，

其中P_0為一個圈，且任意$P_i (1 \le i \le k)$

皆為子圖$P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$的一個耳朵或封閉耳朵，

則稱此分割為圖G的一個封閉耳朵分割。

- 定義107：

(1)有向圖D的分隔集(*separating set*)
或點切集(*vertex* cut)是一個集合$S \subseteq V(D)$
使得G-S不是強連通圖。
(2)有向圖D的點連通數(connectivity)
$C(D)=\{\min\{|S| \mid S \subseteq V(G)$，且D-S不為
強連通或只有一點$\}$
(3)若有向圖D的點連通數至少為k，
則稱D為K-連通圖(K-connected)

- 定義108：

D為有向圖，S、T $\subseteq$ V(D)
符號[S,T]代表所有尾在S中，
頭在T中的弧所成的集合。
圖D的一個邊切集(edge cut)為具有
$[S,\bar{S}]$型式的集合，其中S $\neq \varnothing$且S $\neq$ V(G)

- 定義109：

(1)若有向圖D中每個邊切集都至少有k個邊
則稱D為k-邊連通(k-$edge-connected$)有向圖
(2)有向圖D的邊連通數($edge-connectivity$)
k'(D)為最小的邊切集的大小。

- 定義110：

$X,Y \subseteq V(G)$，一條X,Y-路徑是指一條起點在X中，終點在Y中，且其它點皆不在$X \cup Y$中的路徑。

- 定義111：

(1)$x,y \in V(G)$，所謂x,y-分隔集(x,y-separator)或x,y-切集(x,y-cut)是一個集合$S \subseteq V(G)\backslash\{x,y\}$使得G-S中沒有x,y-路徑。

(2)$x,y \in V(G)$，則x,y-切斷邊集為一個集合$T \subseteq E(G)$使得G-T中沒有x,y-路徑。

- 定義112：

(1)圖G的線圖(*line graph*), 記為L(G)

其點集合集為G的邊集合，即V(L(G))=E(G)

而邊集合E(L(G))

$=\{ef : e=\{u,v\}\in E(G)\ \&\ f=\{v,w\}\in E(G)\}$

(2)若G為有向圖，則將上述定義中$e=\{u,v\}$

改為有向邊$e=(u,v)$, $f=\{v,w\}$改為$f=(v,w)$

即為有向線圖(*line digraph*)的定義。

- 定義113：

$x \in V(G), U \leq V(G)$

若A為一些由x到U中的點的路徑

所成的集合且其中任兩條路徑

只有x一個共同的點，

則稱A為一個$x, U-$扇$(x, U - fan)$

- 定義114：

(1)$\mathrm{A} = A_1, A_2 \cdots A_m$是一個集合族(即$A_i, 1 \leq i \leq m$ 皆為集合)

A的相異代表系(*system of distinct representatives; SDR*)

是一個由m個相異元素$x_1, x_2 \cdots x_m$所成的集合，其中$x_i \in A_i$

(2)$\mathrm{A} = A_1, A_2 \cdots A_m, \mathrm{B} = B_1, B_2 \cdots B_m$是二個集合族。

若存在一個由m個元素所成的集合S，同時是A與B

的相異代表系，則S稱為A與B的共同相異代表系。

- 定義115：

(1)一個網路(*network*)

是指一個具有下列特性的有向圖：

(i)具有一個點s叫出發點(source vertex)

一個點t叫終點(sink vertex)

(ii)具有一個定義在所有弧上容量函數

(capacity function)c,它指定給每個邊e

一個非負整數c(e)稱為容量(capacity)

(2)網路中的點，通常稱為節點(node)

(3)網路上的物流(flow)是一個定義在所有弧的整數值函數

(4)v為網路中的一個節點，f為此網路上的一個物流

我們定義下列符號：

$$f^{+}(v)=\sum_{u\in N^{+}(v)} f((v,w))\text{與}f^{-}(v)=\sum_{u\in N^{-}(v)} f((u,v))$$

- **定義116：**

f 為網路N上的一個物流：

(1) $x \in V(N)$, $f^{+}(x) - f^{-}(x)$

稱為x的流出淨量(*net flow leaving x*)

$f^{-}(x) - f^{+}(x)$稱為x的流入淨量(*net flow* into x)

(2)我們將終點t的流入淨量稱為f的量

或流量(value)記為val(f)

- **定義117：**

具有最大流量的合理物流f

稱為一個最大物流(maximum flow)

它的流量val(f)稱為此網路的最大流量。

- **定義118：**

若網路N上的一個物流f滿足

$f(e)=0,\ \forall e\in E(N)$, 則$f$稱為零物流。

- **定義119：**

f為網路N上的一個合理物流，c為容量函數

(1)N的潛在圖(*underlying graph*)G上的任意路徑皆稱為N的一條半路徑(*semipath*)

(2)若P為一條由出發點s到終點t的半路徑，

且對任意$e\in E(\varnothing)$，下列二式皆成立，

則稱P為f－可增值路徑(f-*augmenting path*)

(a)若P的走向與弧e的方向一致，則必$f(e)<c(e)$

(b)若P的走向與弧e的方向相反，則必$f(e)>0$

(3)在一條f-可增值路徑P的邊上，

我們定義函數E如下:

$$\mathrm{E}(e)=\begin{cases} c(e)-f(e), & \text{若P的走向與}e\text{一致} \\ f(e) & \text{，若P的走向與}e\text{相反} \end{cases}$$

則$\min\limits_{e\in E(p)} E(e)$稱為P的容限$(tolerance)$

- 定義120：

若s,t分別為網路N的出發點與終點

且S,T為點集合V(N)的一個分割滿足$s \in S, t \in T$

則S稱為一個出發點集$(source\ set)$

T稱為一個終點集$(\sin k\ set)$

我們用符號$[S,T]$代表所有尾在S,

頭在T的弧所成的集合，

$[S,T]$稱為一個網路N的出發點/終點切集

若c為N上的容量函數，則切集$[S,T]$的容量

定義為$cap(S,T) = \sum_{e \in [S,T]} c(e)$